Leçon n° 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I/ Espaces vectoriels et dimension.

A/ Familles libres, génératrices, bases. [G]

Définition 1 : Famille libre, génératrice, base.

Proposition 2 : Dans un espace vectoriel E avec une $\mathbb{K}$-base $(e_i)_{i\in I}$, tout élément $x \in E$ s'écrit comme une combinaison linéaire finie d'éléments de $(e_i)_{i\in I}$.

Exemple 3 : Exemples de bases : base canonique de $\mathbb{K}^n$, base de $\mathbb{K}[X]$, base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 4 : Dimension finie et infinie.

Proposition 5 : Si F sev de E et E est de dimension finie, alors F est également de dimension finie.

Exemple 6 : $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie et $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.

B/ Théorie de la dimension. [G]

Théorème 7 : Si E est de dimension finie et $\mathcal{L}$ est une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice, alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Corollaire 8 : Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Corollaire 9 : Théorème de la base extraite.

Corollaire 10 : Théorème de la base incomplète.

Théorème 11 : Toutes les bases ont le même cardinal, donc $\dim(E)$ est bien défini.

Proposition 12 : Tout système libre/générateur de n vecteurs dans un espace de dimension n est une base.

Proposition 13 : Théorème de Grassmann.

Application 14 : Si $(H_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ p hyperplans alors $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geq n-p$.

II/ Applications linéaires et rang.

A/ Applications linéaires et rang. [G]

Définition 15 : Rang d'un endomorphisme.

Théorème 16 : Théorème du rang.

Corollaire 17 : Une application linéaire f est bijective si et seulement si elle est injective si et seulement si elle est surjective.

Contre-exemple 18 : Ceci est faux en dimension infinie, par exemple avec l'application dérivation $P \mapsto P'$ sur $\mathbb{R}[X]$.

Application 19 : Le polynôme interpolateur de Lagrange : l'application $P \mapsto (P(x_1), \ldots, P(x_n))$ est injective en dimension finie donc bijective.

B/ Représentation matricielle et rang d'une matrice. [G]

Proposition 20 : $\dim(\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{L}(E,F)) = np$.

Définition 21 : Matrice dans une base d'un endomorphisme et le rang est indépendant du choix de la base.

Théorème 22 : Si $\mathrm{rg}(A) = r$, alors A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Corollaire 23 : Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.

Théorème 24 : Le rang d'une matrice est égal à la taille du plus grand mineur non nul de la matrice.

Application 25 : Le rang ne dépend pas de l'extension de corps.

Application 26 : La méthode du pivot de Gauss permet de déterminer le rang d'une matrice en $O(n^3)$.

III/ Applications de la dimension finie.

A/ En topologie pour les espaces vectoriels normés. [G]

Théorème 27 : Équivalence des normes.

Corollaire 28 : En dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

Application 29 : Toute application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie vers n'importe quel espace normé est continue.

Corollaire 30 : Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Application 31 : $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 32 : Théorème de Riesz.

B/ Théorie de la réduction. [ROM]

Définition 33 : Endomorphismes trigonalisables.

Proposition 34 : Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Exemple 35 : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc tous les endomorphismes y sont trigonalisables.

Développement 1

Théorème 36 : Réduction de Jordan par la dualité.

Théorème 37 : Réduction des endomorphismes normaux.

C/ En théorie des corps. [PER]

Théorème 38 : Multiplicativité des degrés et bases télescopique.

Définition 39 : Éléments algébriques et transcendants.

Exemple 40 : Exemple d'éléments algébriques.

Proposition 41 : Un élément α est algèbrique ssi $[\mathbb{K}(\alpha):\mathbb{K}] < +\infty$.

Théorème 42 : Existence et unicité des corps finis.

Développement 2

Algorithme 43 : Algorithme de Berlekamp.

Références :

— [PER] Perrin p. 65-73
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 675, p. 681 et p. 745
— [G] Gourdon Algèbre p. 109-126
— [G] Gourdon Analyse p. 47-56
— [OBJ] Beck, Malick Peyré Objectif Agrégation p. 244